**Corrigé**

## Partie I : Etude des petites valeurs de *n*

**1.** Quelles que soient les circonstances, les deux points distincts $M_0$ et $M_1$ sont des points alignés.

**2.** S'il existe une valeur de $k$ telle que : $\overrightarrow{M_kM_{k+1}} = \overrightarrow{M_{k+1}M_{k+2}}$, les points $M_k, M_{k+1}, M_{k+2}$ sont des points alignés, le point $M_{k+1}$ étant le milieu de $[M_kM_{k+2}]$. C'est le cas si deux vecteurs consécutifs sont égaux tous deux ou bien à $\vec{i}$ ou bien à $\vec{j}$

Considérons les cinq premiers points $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4$ de la suite $(M_k)_{k\geq 0}$. Ou bien la circonstance précédente se produit pour $k = 0$, 1 ou 2 et dans ce cas trois consécutifs des cinq points sont alignés, ou bien deux vecteurs consécutifs sont égaux l'un à $\vec{i}$ l'autre à $\vec{j}$ et dans ce cas $\overrightarrow{M_0M_2} = \overrightarrow{M_2M_4} = \vec{i} + \vec{j}$, les points $M_0$, $M_2$ et $M_4$ sont des points alignés, $M_2$ étant milieu de $[M_0M_4]$.

**Quelles que soient les circonstances, trois des cinq premiers points de la suite $(M_k)_{k\geq 0}$ sont des points alignés.**

## Partie II : Préliminaires

**3.** Procédons par récurrence pour construire la suite $(u_k)_{k\geq 0}$.

*Initialisation* : Au rang 0 : $\overrightarrow{M_0M_0} = u_0\vec{i} + (0 - u_0)\vec{j}$ avec : $u_0 = 0$

*Hérédité* : Supposons qu'il existe un rang $k \geq 0$ tels que : $\overrightarrow{M_0M_k} = u_k\vec{i} + (k - u_k)\vec{j}$ avec $0 \leq u_k \leq k$ ( les composantes sont deux entiers positifs et de somme $k$) . Alors au rang suivant $(k+1)$ :

$\overrightarrow{M_0M_{k+1}} = \overrightarrow{M_0M_k} + \overrightarrow{M_kM_{k+1}} = \left(u_k\vec{i} + (k - u_k)\vec{j}\right) + \overrightarrow{M_kM_{k+1}}$

Deux cas se présentent :

- Si $\overrightarrow{M_kM_{k+1}} = \vec{i}$, $\overrightarrow{M_0M_{k+1}} = (u_k+1)\vec{i} + (k - u_k)\vec{j} = (u_k+1)\vec{i} + \left((k+1) - (u_k+1)\right)\vec{j}$, auquel cas : $u_{k+1} = u_k + 1$
- Si $\overrightarrow{M_kM_{k+1}} = \vec{j}$, $\overrightarrow{M_0M_{k+1}} = u_k\vec{i} + (k - u_k + 1)\vec{j} = u_k\vec{i} + \left((k+1) - u_k\right)\vec{j}$, auquel cas : $u_{k+1} = u_k$

Quelles que soient les circonstances, au rang suivant les deux composantes sont des entiers positifs et de somme $(k+1)$. Précisément : $\begin{cases} u_{k+1} = u_k \\ ou \;\; bien \\ u_{k+1} = u_k + 1 \end{cases}$, ce qui définit les relations de récurrence en jeu.

Il existe une suite $(u_k)_{k\geq 1}$ de nombres entiers positifs telle que :

**Pour tout entier naturel *k* :** $\overrightarrow{M_0M_k} = u_k\vec{i} + (k-u_k)\vec{j}$ **avec** $u_{k+1} = u_k \;\; ou \;\; u_{k+1} = 1 + u_k$

(Les composantes du vecteur $\overrightarrow{M_0M_k}$ sont ainsi deux entiers positifs de somme *k*)

**4.** Supposons que l'on dispose de deux nombres réels $s$ et $t$ pour lesquels il existe $n$ entiers $k$ tels que $u_k = ks + t$.

Pour un tel entier $k$ : $\overrightarrow{M_0M_k} = (ks+t)\vec{i} + (k-(ks+t))\vec{j} = k\left(s\vec{i} + (1-s)\vec{j}\right) + t\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$.

Notons $k_1, k_2, ..., k_n$ ces entiers.

- D'une part : $\overrightarrow{M_0M_{k_1}} = k_1\left(s\vec{i} + (1-s)\vec{j}\right) + t\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$
- D'autre part, pour tout indice *i* tel que $1 \leq i \leq n$ : $\overrightarrow{M_0M_{k_i}} = k_i\left(s\vec{i} + (1-s)\vec{j}\right) + t\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$

On en déduit : $\overrightarrow{M_{k_1}M_{k_i}} = (k_i - k_1)\left(s\vec{i} + (1-s)\vec{j}\right)$ pour tout indice *i* tel que $1 \leq i \leq n$

**Les *n* points d'indices $k_1, k_2, ..., k_n$ sont tous alignés sur la droite passant par le point d'indice $k_1$ et de vecteur directeur le vecteur :** $\left(s\vec{i} + (1-s)\vec{j}\right)$

L'existence de deux réels $s$ et $t$ tels que $u_k = sk + t$ pour $n$ valeurs différentes de l'entier $k$ assure l'alignement d'au moins *n* points parmi ceux de la suite $(M_k)_{k\geq 0}$

**5.** Vu la construction par récurrence des termes de la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ de la **question 3**, pour tout entier $k$ strictement positif : $u_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_k$ avec $\varepsilon_i = 0 \; ou \; 1$ pour chaque indice *i* tel que $1 \leq i \leq k$ .

Le terme $u_k$ est une somme de *k* nombres entiers égaux à 0 ou bien à 1, cette somme est donc comprise entre 0 et *k*, comme nous l'avions d'ailleurs remarqué dans le courant la **question 3** (« composantes entiers positifs et de somme *k* »).

De l'inégalité $0 \le u_k \le k$, on déduit que $0 \le \frac{u_k}{k} \le 1$

**Pour tout entier $k$ strictement positif, $v_k$ est un nombre compris entre 0 et 1.**

**6. Théorème des tiroirs.**

Procédons par contraposition.

Soit $k$ et $\ell$ deux entiers naturels non nuls. Supposons que tous les $k$ tiroirs contiennent chacun au plus $(\ell - 1)$ chemises. Alors le nombre de chemises contenues dans l'ensemble des tiroirs est inférieur ou égal à $k \times (\ell - 1)$, nombre qui, puisque $\ell$ et $k$ sont des entiers naturels non nuls, est lui-même inférieur ou égal au nombre $k\ell - 1$ : Si tous les $k$ tiroirs contiennent chacun au plus $(\ell - 1)$ chemises, alors il y a au plus $k\ell - 1$ chemises dans l'ensemble des tiroirs.

**Par contraposition, s'il y a au moins $k\ell$ chemises dans l'ensemble des tiroirs, au moins l'un des tiroirs contient au moins $\ell$ chemises.**

## Partie III : Barrières rationnelles

**7.** Soit $k$ un éventuel entier tel que $\frac{a}{b}$ soit situé entre $v_k$ et $v_{k+1}$.

Nous avons vu que $v_k = \frac{u_k}{k}$. Deux cas se présentent suivant la valeur de $u_{k+1}$ :

*** Premier cas :** $u_{k+1} = u_k$.

Alors, $v_{k+1} - v_k = \frac{u_k}{k+1} - \frac{u_k}{k} = -\frac{u_k}{k(k+1)} \le 0$. Dans ce cas : $v_{k+1} \le \frac{a}{b} \le v_k$

Les nombres entiers $a$ et $b$ sont présumés tels que $\frac{u_k}{k+1} \le \frac{a}{b} \le \frac{u_k}{k}$ soit tels que $\begin{cases} bu_k \le ka + a \\ ka \le bu_k \end{cases}$, c'est-à-dire tels que : $0 \le bu_k - ka \le a$.

Dans ce premier cas, $bu_k - ka$ est positif et inférieur ou égal à $a$.

*** Deuxième cas :** $u_{k+1} = u_k + 1$

Alors : $v_{k+1} - v_k = \frac{u_k + 1}{k+1} - \frac{u_k}{k} = \frac{k - u_k}{k(k+1)} \ge 0$. Dans ce cas : $v_{k+1} \ge \frac{a}{b} \ge v_k$

Les nombres entiers $a$ et $b$ sont présumés tels que $\frac{u_k}{k} \le \frac{a}{b} \le \frac{u_k+1}{k+1}$ soit tels que $\begin{cases} b\,u_k \le k\,a \\ k\,a + a \le b\,u_k + b \end{cases}$, c'est-à-dire tels que : $a - b \le b u_k - k\,a \le 0$.

Dans ce deuxième cas, $bu_k - k\,a$ est négatif et supérieur ou égal à $a - b$.

Quel que soit son signe, $bu_k - k\,a$ est entre le nombre négatif $a - b$ et le nombre positif $a$.

**Quelles que soient les circonstances :** $a - b \le b u_k - k\,a \le a$

**8.** Supposons qu'il existe au moins $(b+1)n$ entiers $k$ tels que $\frac{a}{b}$ soit situé entre $v_k$ et $v_{k+1}$.

D'après la question précédente, ces entiers vérifient tous la double inégalité : $a - b \le b\,u_k - k\,a \le a$.

Or, entre l'entier $a - b$ et l'entier $a$, il y a exactement, au sens large, $(b+1)$ entiers, à savoir les entiers : $a-b, (a-b)+1, (a-b)+2, ..., (a-b)+b = a$.

Répartissons les $(b+1)n$ entiers $k$ en $(b+1)$ « tiroirs » :

- Ceux pour lesquels $b\,u_k - k\,a = a - b$ exactement.
- Ceux pour lesquels $b\,u_k - k\,a = a - b + 1$ exactement.
- …
- Ceux pour lesquels $b\,u_k - k\,a = (a-b) + a = a$ exactement.

D'après le théorème des tiroirs, l'un au moins de ces « tiroirs » contient au moins $n$ entiers.

Il existe donc au moins un entier $c$ appartenant à l'ensemble $\{0, 1, ..., b\}$ tel qu'il y a au moins $n$ entiers $k$ vérifiant l'égalité : $b u_k - k\,a = a - b + c$.

Cette égalité s'écrit aussi bien : $u_k = k\frac{a}{b} + \frac{a-b+c}{b}$.

Si nous posons : $s = \frac{a}{b}$ ; $t = \frac{a-b+c}{b}$, nous pouvons proposer deux nombres réels $s$ et $t$ pour lesquels il existe au moins $n$ entiers $k$ vérifiant la relation $u_k = s\,k + t$.

**D'après la question 4, la suite $(M_k)_{k\geq 0}$ contient au moins $n$ points alignés.**

Un critère d'alignement de $n$ points parmi ceux de la suite $(M_k)_{k\geq 0}$ est qu'il existe une fraction de dénominateur $b$ encadrée par au moins $(b+1)n$ paires de termes $\{v_k\ ;\ v_{k+1}\}$, c'est-à dire des paires de termes consécutifs de la suite $(v_k)_{k\geq 0}$.

## Partie IV : Couples serrés, moyennes naïves et recouvrements par des intervalles principaux

**9.** Pour le couple de fractions $\left(\frac{0}{1}\ ;\ \frac{1}{1}\right)$, $a=0\ ;\ b=c=d=1$, la vérification est immédiate.

**10.** Soit $\left(\frac{a}{b}\ ;\ \frac{c}{d}\right)$ un couple de fractions serré.

**10.a.** Alors : $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\,d-b\,c}{b\,d}$. Par hypothèse, $b$ et $d$ sont des entiers strictement positifs et $b\,c-a\,d=1$. En conséquence : $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=-\frac{1}{b\,d}$. La différence entre ces deux fractions est strictement négative, donc $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$.

**10.b.** La moyenne naïve des deux fractions $\left(\frac{a}{b}\ ;\ \frac{c}{d}\right)$ est la fraction : $\frac{x}{y}=\frac{a+c}{b+d}$.

On note, par un simple « jeu d'écriture », que les deux nombres entiers $(a+c)\ ;\ (b+d)$ vérifient les relations suivantes : $b\times(a+c)-a\times(b+d)=c\times(b+d)-d\times(a+c)=b\,c-a\,d$

Le couple $\left(\frac{a}{b}\ ;\ \frac{c}{d}\right)$ étant supposé serré, $b\,c-a\,d=1$.

Ces relations s'écrivent aussi bien : $b\times(a+c)-a\times(b+d)=c\times(b+d)-d\times(a+c)=1$

On en déduit d'une part que la relation de Bézout est vérifiée pour les deux nombres entiers $(a+c)\ ;\ (b+d)$ **:**

**Ces nombres sont premiers entre eux et la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$ est bien irréductible.**

**On en déduit d'autre part que les couples $\left(\dfrac{a}{b}\,;\,\dfrac{a+c}{b+d}\right)$ et $\left(\dfrac{a+c}{b+d}\,;\,\dfrac{c}{d}\right)$ sont des couples serrés.**

**En résumé la moyenne naïve d'un couple de fractions serré est une fraction irréductible qui s'intercale strictement entre elles en les serrant l'une et l'autre.**

**11.** Supposons que $\left(\dfrac{a}{b}\,;\,\dfrac{c}{d}\right)$ et $\left(\dfrac{c}{d}\,;\,\dfrac{e}{f}\right)$ soient deux couples de fractions irréductibles serrées. Par hypothèse, $b\,c-a\,d=d\,e-c\,f=1$.

La **question 10.a** a montré que s'il en est ainsi, $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$ et $\dfrac{c}{d}<\dfrac{e}{f}$, la fraction $\dfrac{c}{d}$ est intercalée entre $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{e}{f}$. Plus précisément : $\dfrac{c}{d}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{b\,d}$ et $\dfrac{c}{d}-\dfrac{e}{f}=-\dfrac{1}{d\,f}$

Or, si la relation $d\geq 2n$ est vérifiée, les relations : $0<\dfrac{1}{b\,d}\leq\dfrac{1}{2\,b\,n}$ et $0<\dfrac{1}{d\,f}\leq\dfrac{1}{2\,f\,n}$ le sont aussi.

On en conclut d'une part que : $0<\dfrac{c}{d}-\dfrac{a}{b}\leq\dfrac{1}{2b\,n}$ , autrement dit que :

$\dfrac{c}{d}$ **appartient à l'intervalle** $\left]\dfrac{a}{b}\,;\,\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{2b\,n}\right]$ **donc à l'intervalle principal supérieur de la fraction** $\dfrac{a}{b}$**.**

On en conclut d'autre part que : $-\dfrac{1}{2\,f\,n}\leq\dfrac{c}{d}-\dfrac{e}{f}<0$ , autrement dit que :

$\dfrac{c}{d}$ **appartient à l'intervalle** $\left[\dfrac{e}{f}-\dfrac{1}{2\,f\,n}\,;\,\dfrac{e}{f}\right[$ **donc à l'intervalle principal inférieur de la fraction** $\dfrac{e}{f}$**.**

**12.** Nous avons vu en **question 1** que le couple initial $\left(\dfrac{0}{1}\,;\,\dfrac{1}{1}\right)$ était un couple serré et en **question 10.b** que la moyenne naïve d'un couple de fractions serrées s'intercale strictement entre les deux fractions en les serrant l'une et l'autre. À chaque étape, le processus décrit ne génère donc que des listes de fractions irréductibles qui serrent leurs deux voisines et dont le dénominateur est strictement inférieur à $2n$. Or, il n'y a qu'un nombre fini de fractions disponibles, c'est-à-dire de fractions irréductibles $0\leq\dfrac{a}{b}\leq 1$ dont le dénominateur est strictement inférieur à $2n$. Ce nombre de fractions est en effet au plus égal au nombre de couples de nombres entiers $(a\,;\,b)$ vérifiant : $\begin{cases}1\leq b\leq 2n-1\\ 0\leq a\leq b\end{cases}$ , c'est-à-dire, vu que $a$ prend au plus $b+1$

valeurs pour $b$ fixé, à la somme $2+3+4+...+2n$, somme de termes d'une suite arithmétique qui vaut : $2n^2+n-1$ (le lecteur pourra le vérifier).

On remarque que pour $n \geq 1$ : $4n^2-(2n^2+n-1)=2n^2+n-1=(n+1)(2n-1)\geq 0$ : le nombre de fractions disponibles est inférieur ou égal à $4n^2$ . Le processus ne peut générer davantage de fractions.

**Nécessairement, le processus s'arrête et la liste obtenue contient au plus $4n^2$ fractions.**

**13.** Soit $q_k=\dfrac{a_k}{b_k}$ ; $q_{k+1}=\dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$ deux fractions consécutives de la liste obtenue à l'issue du processus. Il s'agit d'un couple serré.

Leur moyenne naïve est la fraction irréductible $r_k=\dfrac{a_k+a_{k+1}}{b_k+b_{k+1}}$. Cette fraction serait la prochaine fraction qui viendrait s'intercaler dans la liste entre $q_k$ et $q_{k+1}$ si l'on continuait l'algorithme.

Conformément aux directives du processus : $1\leq b_k\leq 2n-1$ et $1\leq b_{k+1}\leq 2n-1$ car les dénominateurs de toutes les fractions générées sont au plus égaux à $2n-1$ mais en même temps la somme $b_k+b_{k+1}$ de leurs dénominateurs est au moins égale à $2n$, sinon le processus décrit aurait déjà intercalé une fraction entre les deux fractions en jeu.

Ainsi : $2n\leq b_k+b_{k+1}\leq 2\times(2n-1)=4n-2$ donc *a fortiori* : $2n\leq b_k+b_{k+1}\leq 4n-1$

**Les dénominateurs des fractions $r_k$ appartiennent tous à $[2n\ ;\ 4n-1]$**

**14.** Pour chaque entier $k\in\{1\ ;\ 2\ ;...;\ \ell-1\}$, le couple de fractions $(q_k\ ;\ q_{k+1})$ est serré et leur moyenne naïve $r_k$ est d'après la **question 10** une fraction irréductible qui s'intercale strictement entre elles en les serrant l'une et l'autre.

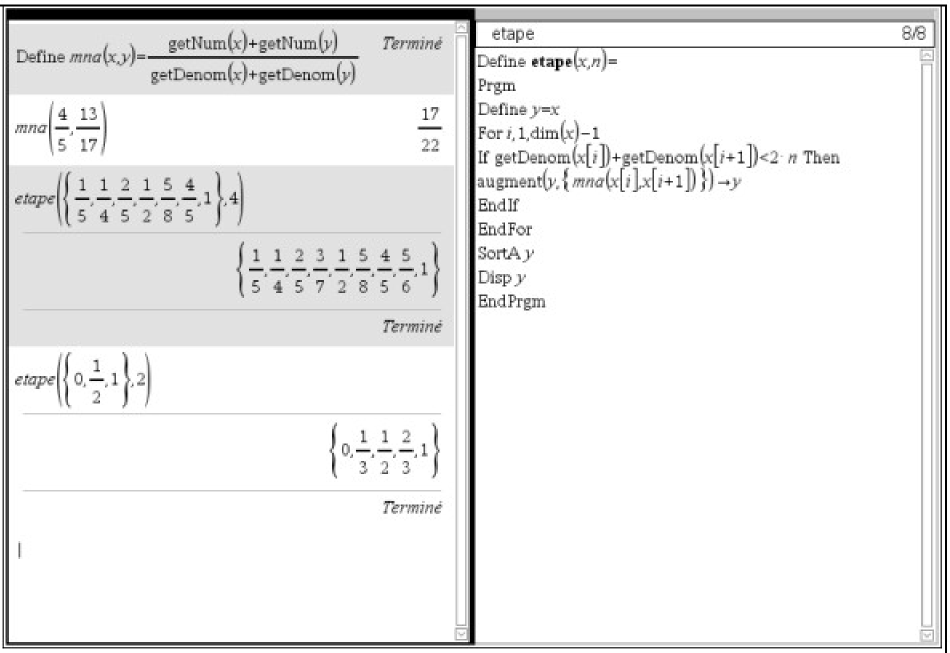
Or, le dénominateur de la fraction $r_k$ qui s'intercale entre $q_k$ et $q_{k+1}$ a d'après la question précédente un dénominateur au moins égal à $2n$. Cette condition étant vérifiée, d'après la **question 11**, cette fraction appartient à l'intervalle principal supérieur de $q_k$ et à l'intervalle principal inférieur de $q_{k+1}$ : $q_k<r_k\leq q_k+\dfrac{1}{2b_k n}$ et aussi : $q_{k+1}-\dfrac{1}{2b_{k+1}n}\leq r_k<q_{k+1}$.

**$[q_k\ ;\ r_k]$ est inclus dans l'intervalle principal supérieur de $q_k$ et $[r_k\ ;\ q_{k+1}]$ est inclus dans l'intervalle principal inférieur de $q_{k+1}$**

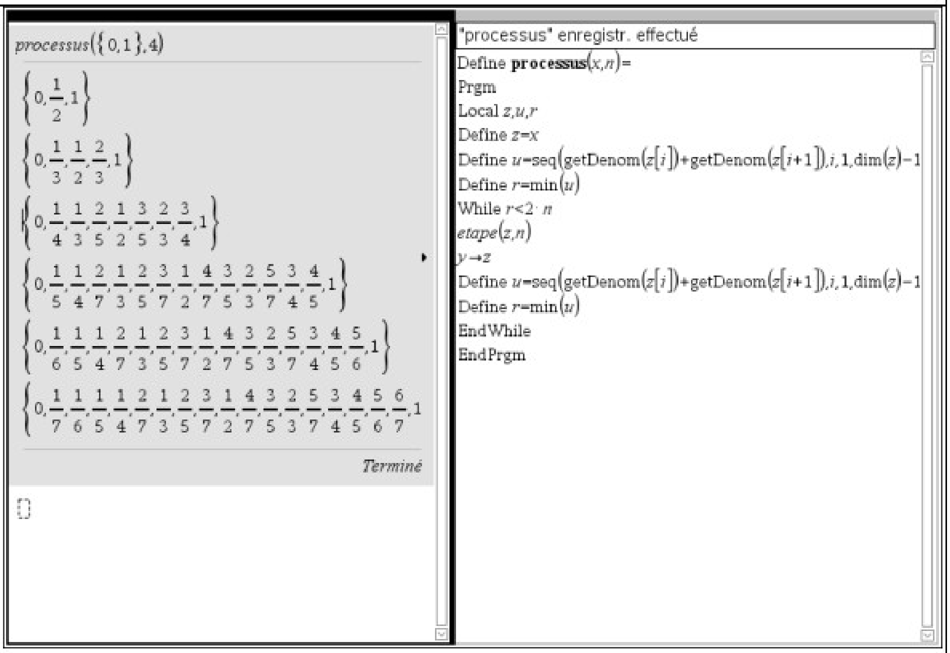
## Complément : un exemple de mise en œuvre du « processus » :

Les algorithmes qui suivent ont été écrits avec TI-Nspire.

La fonction **mna** définit la moyenne naïve de deux fractions. Le programme « **etape** » insère dans une liste de fractions les moyennes naïves de deux fractions consécutives à condition que leur somme des dénominateurs soit plus petite que $2n$ .




La recherche de la liste issue du processus décrit dans le problème peut être automatisée, c'est le rôle du programme « **processus** ».




NB. *Les listes ainsi générées portent le nom de « suites de Farey ». Le lecteur pourra se documenter à leur propos.*

## Partie V : Coincé dans un intervalle principal

**15.** D'après la définition des termes de la suite $(v_k)_{k\geq 1}$ : $v_k = \dfrac{u_k}{k}$.

Si chacun des termes $v_{\ell n}$ ; $v_{\ell n+1}$ ;...; $v_{2\ell n-1}$ appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{a}{b} ; \dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{2bn}\right]$, pour tout entier $k$ tel que

$\ell n \leq k \leq 2\ell n-1$ : $\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{u_k}{k} \leq \dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{2bn}$

- D'une part : $\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{u_k}{k}$, ce qui donne : $bu_k - ak \geq 0$
- D'autre part $\dfrac{u_k}{k} \leq \dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{2bn}$ ce qui donne : $bu_k - ak \leq \dfrac{k}{2n}$. Or : $\dfrac{k}{2n} \leq \dfrac{2\ell n-1}{2n} = \ell - \dfrac{1}{2n} < \ell$

**En définitive pour tout entier *k* tel que $\ell n \leq k \leq 2\ell n-1$ : $0 \leq bu_k - ak < \ell$**

**16.** Nous avons ainsi trouvé $\ell n$ nombres $u_k$ qui prennent l'une ou l'autre des $\ell$ valeurs de l'ensemble $\{0 ; 1 ;...; \ell-1\}$.D'après le théorème des tiroirs, au moins une de ces valeurs est prise au moins $n$ fois.

Il existe au moins un nombre entier $c$, vérifiant $0 \leq c \leq \ell-1$, tel que $bu_k - ak = c$, c'est-à-dire tel que $u_k = \dfrac{a}{b}k+\dfrac{c}{b}$ pour au moins $n$ valeurs de l'entier $k$. D'après le résultat de la **question 5** avec $s = \dfrac{a}{b}$ ; $t = \dfrac{c}{b}$ :

**La suite $(M_n)_{n\geq 1}$ contient au moins *n* points alignés.**

**17.** On suppose maintenant que chacun des termes $v_{\ell n}$ ; $v_{\ell n+1}$ ;...; $v_{2\ell n-1}$ appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{a}{b}-\dfrac{1}{2bn} ; \dfrac{a}{b}\right]$, donc pour tout entier $k$ tel que $\ell n \leq k \leq 2\ell n-1$ : $\dfrac{a}{b}-\dfrac{1}{2bn} \leq \dfrac{u_k}{k} \leq \dfrac{a}{b}$

- D'une part : $\dfrac{a}{b} \geq \dfrac{u_k}{k}$, ce qui donne : $bu_k - ak \leq 0$
- D'autre part $\dfrac{u_k}{k} \geq \dfrac{a}{b}-\dfrac{1}{2bn}$ ce qui donne : $bu_k - ak \geq -\dfrac{k}{2n}$. Or : $-\dfrac{k}{2n} \geq -\dfrac{2\ell n-1}{2n} = -\ell+\dfrac{1}{2n} > -\ell$

En définitive, pour tout entier $k$ tel que $\ell n \leq k \leq 2\ell n-1$ : $0 \geq bu_k - ak > -\ell$.

Nous avons ainsi trouvé $\ell n$ nombres $u_k$ qui prennent l'une ou l'autre des $\ell$ valeurs de l'ensemble $\{-\ell+1 ; -\ell+2 ;...; -1 ; 0\}$. D'après le théorème des tiroirs, au moins une de ces valeurs est prise au moins $n$ fois.Il existe au moins un nombre entier $c$, vérifiant $-\ell+1 \leq c \leq 0$ tel que $bu_k - ak = c$, c'est-à-dire tel que $u_k = \dfrac{b}{a}k+\dfrac{c}{a}$ pour au moins $n$ valeurs de l'entier $k$.

**La suite $(M_n)_{n\geq 1}$ contient dans ce cas aussi au moins *n* points alignés.**

## Partie VI : Conclusion

**18.** Faisons le point :

- Nous disposons d'après la **question 12** d'une liste d'au plus $4n^2$ fractions irréductibles issues du processus: $0 = q_0 < q_1 < ... < q_\ell = 1$, liste dont tout couple consécutif est serré. Ces fractions partagent l'intervalle $[0 ; 1]$ en au plus $4n^2 - 1$ intervalles $[q_k \ ; \ q_{k+1}]$

- Nous avons partagé en deux morceaux chacun de ces intervalles à l'aide de la moyenne naïve $r_k$ de leurs extrémités.

- Nous avons ainsi recouvert l'intervalle $[0 ; 1]$ par au plus $2 \times (4n^2 - 1) = 8n^2 - 2$ intervalles, à savoir $[q_k \ ; \ r_k]$ et $[r_k \ ; \ q_{k+1}]$ où $1 \leq k \leq \ell - 1 \leq 4n^2 - 1$, tous inclus dans des intervalles principaux. Notons $N = 8n^2 - 2$ ce majorant du nombre d'intervalles de recouvrement.

- Les dénominateurs de ces fractions $q_k$ ou $r_k$ sont, d'après la **question 13**, tous inférieurs ou égaux au nombre $4n - 1$. Notons $B = 4n - 1$ ce majorant des dénominateurs employés.

**18.a.** La suite $(M_k)_{k \geq 0}$ étant constituée d'une infinité de points, la suite associée $(v_k)_{k \geq 0}$ est constituée d'une infinité de termes. L'un au moins des intervalles de subdivision $[q_k \ ; \ r_k]$ ou $[r_k \ ; \ q_{k+1}]$ contient une infinité de termes. Notons $I$ cet intervalle.

Distinguons deux cas de figure :

**Premier cas :** Tous les termes $v_k$ appartiennent à $I$ à partir d'un certain rang $A$.

Si nous choisissons $\ell$ de sorte que $\ell n \geq A$, tous les termes $v_k$ depuis celui d'indice $\ell n$ jusqu'à celui d'indice $2\ell n - 1$ appartiennent à $I$. L'une ou l'autre des **questions 16 ou 17** permet de conclure que la suite $(M_k)_{k \geq 0}$ contient bien $n$ points alignés.

**Deuxième cas :** La position des termes de la suite $(v_k)_{k \geq 0}$ fluctue, tantôt dans $I$, tantôt à l'extérieur de $I$.

En considérant les sorties et les entrées successives dans l'intervalle $I$, nous pouvons construire une suite de couples $c_k = \left\{ v_{u(k)} \ ; \ v_{u(k)+1} \right\}$ de termes consécutifs tels que, pour chaque indice $k$, l'un des deux éléments est à l'intérieur de $I$ et l'autre à l'extérieur. Construisons ainsi au moins $8n^2$ couples.

L'une des deux extrémités de $I$ sera ainsi encadrée par au moins $4n^2$ couples, donc par au moins $(B+1) \times n$ couples avec les notations introduites au début de cette question.
Les hypothèses de la **question 8** sont alors vérifiées. Nous pouvons conclure que la suite $(M_k)_{k \geq 0}$ contient bien $n$ points alignés.

**Quel que soit le cas de figure, et quelle que soit la valeur de l'entier $n \geq 2$, la suite $(M_k)_{k\geq 0}$ contient toujours au moins *n* points alignés.**

**18.b.** Considérons, comme il n'est pas tout à fait indiqué dans l'énoncé, les $n \times 2^{32n^4-2}$ premiers points de la suite $(M_k)_{k\geq 0}$

L'exposant de 2 est ainsi choisi ainsi parce que : $32n^4 - 2 = (8n^2 - 2) \times (4n^2 + 1) = N \times ((B+1)n + 1)$ et que nous allons exploiter cette factorisation.

Intéressons-nous plus particulièrement aux termes de la suite $(v_k)_{k\geq 0}$ d'indices : $n \times 2^j$ où $j$ appartient à l'ensemble : $\{1 ; 2 ; ...; 32n^4 - 2\}$, à savoir les termes d'indices : $n, n\times 2, n\times 2^2, ..., n\times 2^j, ..., n\times 2^{32n^4-2}$.

Il y a ainsi $32n^4 - 2 = (8n^2 - 2) \times (4n^2 + 1)$ termes qui se répartissent dans les $N = 8n^2 - 2$ intervalles de subdivision $[q_k ; r_k]$ ou bien $[r_k ; q_{k+1}]$ des **questions 12 à 14**.

D'après le théorème des tiroirs, au moins un de ces intervalles contient au moins $4n^2 + 1$ termes. Soit *I* cet intervalle. Soit $j_1, < j_2 < ... < j_{4n^2+1}$ les exposants *j* associés aux termes qui vérifient l'appartenance à *I*.

Distinguons deux cas de figure :

**Premier cas :** Il existe un exposant $j_u$ tel que tous les termes de la suite $(v_k)_{k\geq 0}$ dont l'indice est entre $n \times 2^{j_u}$ et $n \times 2^{j_{u+1}}$, sans exception, sont aussi dans $I$. S'il en est ainsi, au moins tous les termes dont l'indice est entre $n \times 2^{j_u}$ (inclus) et $n \times 2^{j_u+1}$ (exclu) appartiennent à $I$. En vertu de l'une ou l'autre des **questions 16 ou 17**, la suite $(M_k)_{k\geq 0}$ contient bien *n* points alignés

**Deuxième cas :** Ou bien cette circonstance n'a pas lieu et dans ce cas, pour chaque $u$ tel que $1 \leq u \leq 4n^2 = (B+1)n$, il y a au moins un terme de la suite $(v_k)_{k\geq 0}$ d'indice compris entre $n \times 2^{j_u}$ (inclus) et $n \times 2^{j_u+1}$ (exclu) qui, lui, n'est pas dans *I*. Ainsi, entre les termes d'exposants $j_u$ et $j_{u+1}$, une extrémité de *I* est traversée au moins deux fois (une fois pour sortir de *I* et une deuxième fois pour y rentrer).
En considérant les sorties et les entrées successives dans l'intervalle *I*, nous pouvons construire une suite finie d'au moins $8n^2$ couples $c_k = \{v_{u(k)} ; v_{u(k)+1}\}$ de termes consécutifs tels que, pour chaque indice *k*, l'un des deux éléments est à l'intérieur de *I* et l'autre à l'extérieur.
Nous disposons alors d'au moins $8n^2 = 2(B+1) \times n$ termes qui sont de part et d'autre soit de la première extrémité de *I*, soit de la deuxième extrémité. Par conséquent, au moins $4n^2 = (B+1)n$ de ces termes sont de part et d'autre de l'une des deux extrémités.

De façon analogue au **18.a**, les hypothèses de la **question 8** sont alors vérifiées. Nous pouvons conclure que la suite $(M_k)_{k\geq 0}$ contient bien $n$ points alignés.

**Quel que soit le cas de figure, et quelle que soit la valeur de l'entier $n \geq 2$, dans l'ensemble des $n \times 2^{32n^4-2}$ premiers points de la suite $(M_k)_{k\geq 0}$, il y a toujours au moins $n$ points alignés.**

NB. Il est sans doute possible de proposer un meilleur nombre car certaines majorations ont été faites « à la louche ».

*Sous réserve de contrôle laissé au soin du lecteur :*

Par exemple, nous avons vu que le nombre $\ell$ de fractions irréductibles de la **question 12** est majoré par $2n^2+n-1$, il serait possible de choisir : $N = 4n^2+2n-4$.

Nous avons vu aussi que les dénominateurs des fractions $r_k$ sont majorés par $4n-2$, il serait possible de choisir : $B = 4n-2$.

Il semble donc qu'on puisse proposer le nombre : $E = N \times \left(\left(B+1\right)n+1\right) = 16n^4+4n^3-14n^2+6n-4$

comme exposant de 2 et remplacer le nombre de l'énoncé par le nombre $n \times 2^{16n^4+4n^3-14n^2+6n-4}$.

Ainsi, pour être sûr d'avoir trois points alignés au moins, l'énoncé propose un nombre de points de l'ordre de $5{,}58 \times 10^{780}$ ; quant à nous, nous proposons un nombre de points de l'ordre de $1{,}40 \times 10^{780}$, quatre fois moins, et si ce nouveau nombre s'avère correct, nous n' en proposerions « que » $2{,}56 \times 10^{289}$, le gain serait substantiel..

## Partie VII : Vers l'infini, et au delà !

**19.** Cette question joue quelque peu sur le sens que l'on donne à l'expression « une infinité de points alignés ».

Supposons d'abord qu'il existe une suite de points $(M_k)_{k\geq 0}$ telle que l'ensemble des nombres de points qui font partie d'un même alignement soit un ensemble borné.

Cet ensemble possède alors un plus grand élément. Soit $A$ le nombre maximal de points alignés de cette suite $(M_k)_{k\geq 0}$.

Les différentes parties précédentes ont montré que l'on pouvait trouver dans toute suite $(M_k)_{k\geq 0}$ un nombre quelconque de points alignés. En particulier, on pourrait trouver un alignement de $A+1$ points, ce qui contredirait le statut de $A$, l'hypothèse d'un nombre maximal de points alignés est à rejeter.

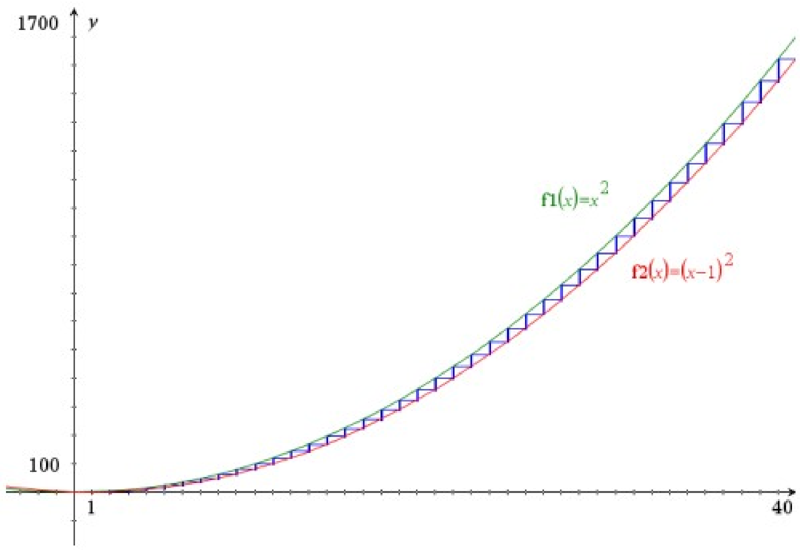
On peut donc trouver dans la suite $(M_k)_{k\geq 0}$ des alignements arbitrairement longs, c'est-à-dire composés d'un nombre fini quelconque de points, aussi grand qu'on le veut.

Pour autant, est-ce qu'il existe toujours un vecteur $\vec{u}$ fixé et un point $M_i$ fixé de la suite tel que $\overrightarrow{M_iM_k}$ soit colinéaire à $\vec{u}$ pour une infinité de valeurs de $k$ ? Rien dans le problème ne prouve cette propriété.

**Une suite de points $(M_k)_{k\geq 0}$ ne contient pas nécessairement une infinité de points alignés.**

***Illustration par un contre exemple***

En bleu un chemin $(M_k)_{k\geq 0}$ en escalier coincé entre les paraboles d'équations $y = x^2$ et $y = (x-1)^2$. Il ne peut pas y avoir une infinité de points $M_k$ alignés car il n'y a aucune droite qui soit incluse entièrement dans la région limitée par les deux paraboles.




NB. *Ce problème, dont l'étude nous a captivé, qui nous amène à déterminer un ensemble fini qui possède à coup sûr une propriété donnée, exhale un délicat parfum de « théorie de Ramsey », théorie que nous avons découverte à cette occasion. Il nous initie à certaines des méthodes utilisées dans ce genre de situation. Nous invitons le lecteur à consulter par exemple l'article Wikipedia correspondant.*